**Olimpiada Națională de Matematică -etapa locală**

**15 februarie 2015-PITEȘTI**

**Clasa a X-a**

**SUBIECTE:**

1. Se considera numerele $a, b, c, d $astfel incât $a>c>b>0$ si $ab=cd.$

Demonstrați că pentru orice $x\in R, a^{x}+b^{x}\geq c^{x}+d^{x}.$

1. Să se rezolve ecuația $\left(3^{x}+2\right)^{log\_{5}3}+2=\left(5^{x}-2\right)^{log\_{3}5}$.

G.M. 6-7-8/2014

1. Se consideră numerele complexe$ a,b,c $distincte două câte două și de module egale astfel incât

$\left|a-b\right|∙\left(a+b\right)+\left|b-c\right|∙\left(b+c\right)+\left|c-a\right|∙\left(c+a\right)$=0

$Demonstrați că a,b,c sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral $.

1. Determinați numerele $a,b,c>0$ cu proprietatea că

$$a^{log\_{3}a}∙b+b^{log\_{3}b}∙c+c^{log\_{3}c}∙a=\sqrt[4]{27.}$$

**Notă:**

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

Timp de lucru 3 ore.

**Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală**

**15 februarie 2015-PITEȘTI**

**Clasa a X-a**

# BAREM de CORECTARE si NOTARE:

**1**.$ a^{x}+b^{x}-c^{x}-\left(\frac{ab}{c}\right)^{x}\geq 0$………………………………………………………………….**1 p**

$c^{x}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^{x}+\left(\frac{b}{c}\right)^{x}-1-\left(\frac{a∙b}{c∙c}\right)^{x}\right]\geq 0$………………………………………………………..**1 p**

$\left(\left(\frac{a}{c}\right)^{x}-1\right)\left(1-\left(\frac{b}{c}\right)^{x}\right)\geq 0⟺\left(\frac{a}{c}\right)^{x}-1 si 1- \left(\frac{b}{c}\right)^{x}$au același semn…..**3 p**

Cum$ \frac{a}{c}>1 și\frac{b}{c}<1$se consideră cazurile$ x\geq 0 si x<0 $si

 problema este rezolvată………………………………………………………………........... **2p**

**2**. Ecuația se scrie$ ^{log\_{5}\left(3^{x}+2\right)}+2=5^{log\_{3}\left(5^{x}-2\right)}$……………………………………….**1p**

Notăm$ log\_{5}\left(3^{x}+2\right)=a, log\_{3}\left(5^{x}-2\right)=b $și obținem sistemul de ecuații

$3^{x}+2=5^{a}, 3^{b}+2=5^{x}, 3^{a}+2=5^{b}$……………………………………………………**2p**

Dacă $ x>a⟹3^{x}+2>3^{a}+2⟹5^{a}>5^{b}⟹a>b⟹$

$⟹3^{a}+2>3^{b}+2⟹5^{b}>5^{x}⟹b>x $contradicție

Si analog dacă$ x<a$…………………………………………………………………………………….**2p**

Se obține$ x=a si analog x=b, de unde3^{x}+2=5^{x}$

Cu soluție unică$ x=1$………………………………………………………………………………… **2p**

**3**. Relația din ipoteză se scrie :$\left(a+b+c\right)\left(\left|a-b\right|+\left|b-c\right|+\left|c-a\right|\right)-\left(c∙\left|a-b\right|+a∙\left|b-c\right|+b∙\left|c-a\right|\right)=0$………………………………………………**4p**

Impărțind prin$ \left|a-b\right|+\left|b-c\right|+\left|c-a\right|$se obține$ Ζ \_{Η}-Ζ\_{Ι}$=0…………………**1p**

Atunci$ Ι=Η⟹triunghiul ABC este echilateral$……………………………………**2p**

**4**. Notăm:

$log\_{3}a=x, log\_{3}b=y ,log\_{3}c=z⟹ 3^{x^{2}+y}+3^{y^{2}+z}+3^{z^{2}+x}=\sqrt[4]{27}$…….**1p**

Cu inegalitatea mediilor$\sqrt[4]{27} \geq 3\sqrt[3]{3^{x^{2}+y^{2}+z^{2}+x+y+z}}$…………………………………**2p**

Obținem $\frac{3}{4} \geq \frac{3+x^{2}+y^{2}+z^{2}+x+y+z}{3}$………………………………………………………………..**1p**

De unde se obține$\left(2x+1\right)^{2}+\left(2y+1\right)^{2}+\left(2z+1\right)^{2}\leq 0⟹$

$x=y=z=-\frac{1}{2}$……………………………………………………………………………………………**2p**

Finalizare$a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ……………………………………………………………………………**.1p**

**Notă:**

Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.