INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ARGEȘ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Concursul Judeţean „Dan Barbilian”
13 decembrie 2014 - PITESTI
Clasa a XI-a

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

1. $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător **1,5p**

$(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit **1,5p**

Celălalt şir este strict crescător, deci mărginit inferior **2p**

$$x_{n+1}=\frac{2x_n+1}{x_n+2}<\frac{2x_n+1}{3},(\forall)n\geq 0\Rightarrow x_{n+1}-1<\frac{2(x_n-1)}{3}\ (\forall)n\geq 0\Rightarrow \frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}<\frac{2}{3}$$ **1p**

$$\Rightarrow x_n-1<\left(\frac{2}{3}\right)^n\ (\forall)n\geq 1\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(x_k-1)<2,(\forall)n\geq 1\Rightarrow x_0+x_1+\ldots+x_n-n<4$$ **1p**

2. Fie $y_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$ şi $y=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$

$y=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n\Rightarrow(\forall)\varepsilon>0,(\exists)n_\varepsilon\geq 1$ astfel încât $|y_n-y|<\frac{\varepsilon}{2},(\forall)n\geq n_\varepsilon$ **3p**

Fie $m>n_\varepsilon$ un număr natural fixat.

Pentru orice n>m avem $|y_n-y_m|\leq|y_n-y|+|y_m-y|<\varepsilon$ **2p**

$|y_n-y_m|=x_{m+1}+x_{m+2}+\ldots+x_n\geq(n-m)x_n$ **1p**

$(n-m)x_n<\varepsilon,(\forall)n>m\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(n-m)x_n=0\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=0$ **1p**

3. detA=detB=0⇒ $A^2=aA$ şi $B^2=bB$, unde a=trA, b=trB..................................**4p**

$$\det(A^n+B^n)=\det(a^{n-1}A+b^{n-1}B)=\frac{tr^2(a^{n-1}A+b^{n-1}B)-tr(a^{n-1}A+b^{n-1}B)^2}{2}=$$

$$\frac{(a^n+b^n)^2-(a^{2n}+b^{2n})}{2}=a^nb^n$$ **2p**

$$\det(A+B)^n=\det{}^n(A+B)=\left(\frac{tr^2(A+B)-tr(A+B)^2}{2}\right)^n=a^nb^n$$ **1p**

4. Fie ε o rădăcină de ordin 3 a unităţii, diferită de 1.

$(A+\varepsilon B+\varepsilon^2C)(A+\varepsilon^2B+\varepsilon C)=A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA$ **4p**

$\det((A+\varepsilon B+\varepsilon^2C)(A+\varepsilon^2B+\varepsilon C))\geq 0$ **2p**

$(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2=2(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$ **1p**

<u>Notă:</u>

Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.